Mécanique des structures

$$\boxed{\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}}$$

Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

Dr. Alain Prenleloup

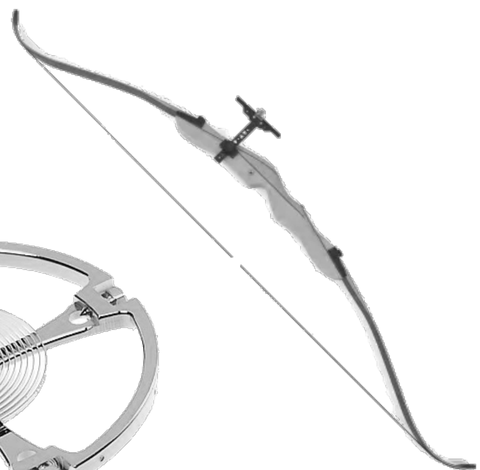
SGM BA3 2024-2025

EPFL

4 1
3 2

Rappel

Applications



Exprimer l'énergie de déformation

Théorème de réciprocité

Coefficients d'influence

Théorème de Castigliano

Expression de l'énergie de déformation

L'expression générale donnant l'énergie de déformation dans une poutre en fonction des forces et des moments extérieurs qui s'applique au système, peut être exprimée comme une superposition des énergies de déformation des cas particuliers.

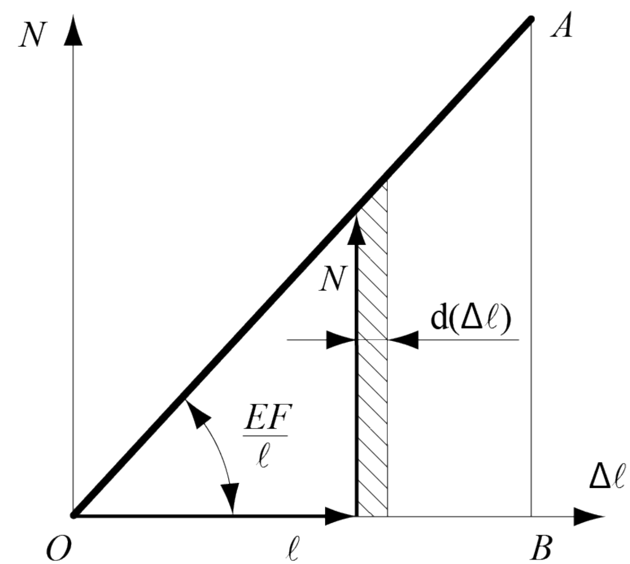
Énergie de déformation élastique d'une poutre soumise à un *effort normal*

- $$U = \int_0^{\Delta\ell} dU = \int_0^{\Delta\ell} N\, d(\Delta\ell) = \frac{E\,F}{\ell}\int_0^{\Delta\ell} \Delta\ell\, d(\Delta\ell) = \frac{E\,F(\Delta\ell)^2}{2\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell}EF\frac{\Delta\ell}{2} = N\frac{\Delta\ell}{2} = \frac{N^2\ell}{2EF}$$

$dU = N\,d(\Delta\ell)$

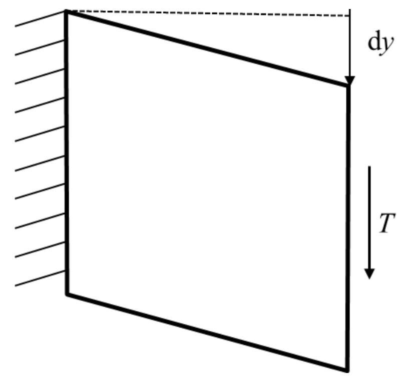
$N = \frac{\Delta\ell E\,F}{\ell}$

- $$dU = \frac{N^2}{2EF}dx$$
- $$U_N = \int_0^{\ell}\frac{N^2}{2EF}dx$$



Expression de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation en *cisaillement simple* équivaut au demi-produit de l'effort tranchant T par le glissement $\mathrm{d}y$ de la section F

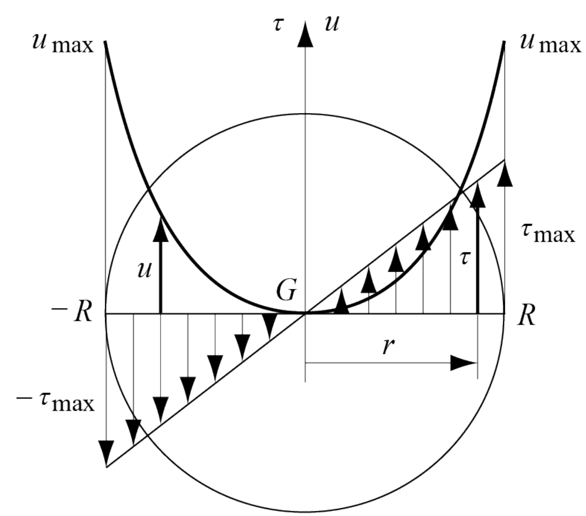


- $$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\,T\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\tau\,F \cdot \gamma \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\tau\,\gamma\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G}\,\mathrm{d}V$$

$dy = \gamma \mathrm{d}x$

$\gamma = \frac{\tau}{G}$

Énergie de déformation élastique d'une poutre soumise à un *effort de torsion*



- $$dU = \frac{1}{2} M_t\, d\varphi = \frac{M_t^2}{2G\, I_p} dx$$

$d\varphi = \frac{M_t\, dx}{G\, I_p}$

- $$U = \frac{1}{2} M_t \int_0^{\ell} d\varphi = \frac{1}{2} M_t \varphi = \frac{M_t^2\, \ell}{2G\, I_p}$$
- $$U_{M_t} = \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2G I_p} dx$$

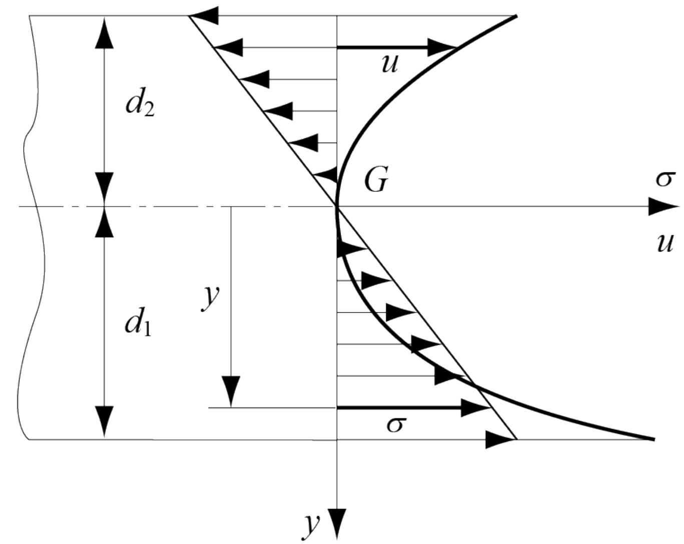
Expression de l'énergie de déformation

Énergie de déformation élastique d'une poutre soumise à un *moment de flexion pure*

- $dU = \frac{1}{2} M_f \, d\theta \quad = \frac{1}{2} M_f \frac{dx}{\rho} = \frac{M_f^2}{2EI} dx$

$dx = \rho \, d\theta$
$1/\rho = M/EI$

- $U_{M_f} = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx$



Expression de l'énergie de déformation

Du fait que la **contrainte tangentielle** τ **et l'angle de glissement** γ **varient dans la section**, les fibres subissent ainsi des déplacements transversaux différents et la section ne peut rester plane. **Approximation** : Le déplacement transversal relatif des deux sections d'un élément de poutre de longueur dx, provoqué par l'effort tranchant T, peut être caractérisé par un angle de glissement global $\bar{\gamma}$ (voir chapitre 6)

- $dy_T = \bar{\gamma} dx$

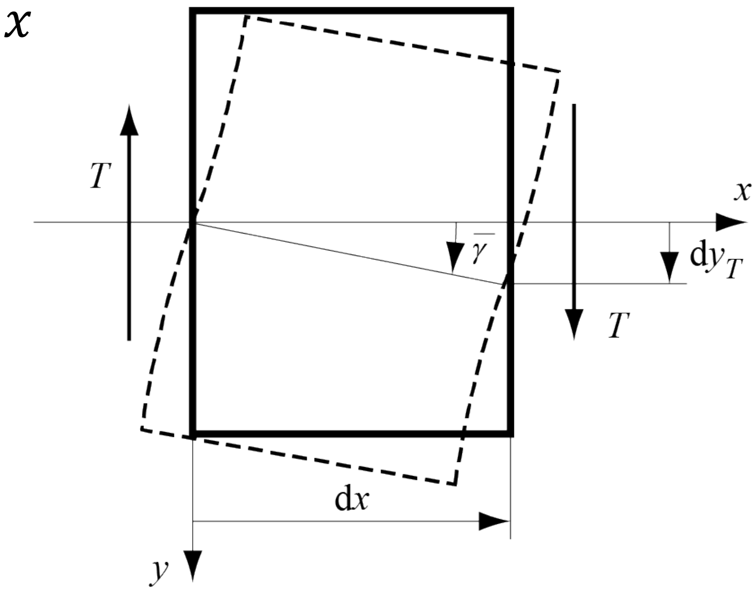
Énergie de déformation élastique d'une poutre soumise à un *effort tranchant*

- $dU = \frac{1}{2} T\, dy_T = \frac{1}{2} T \bar{\gamma}\, dx = \frac{1}{2} T\, \eta \frac{\tau_{moy}}{G} dx = \eta \frac{T^2}{2G\, F} dx$

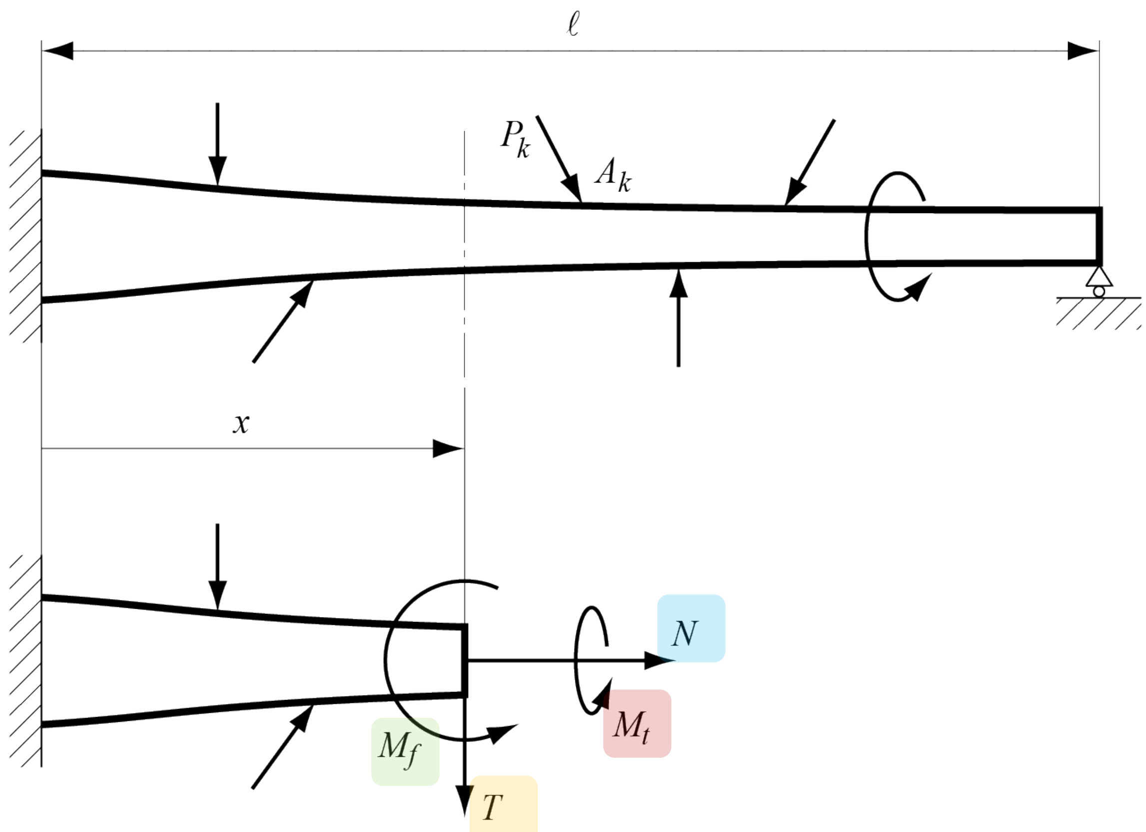
$$\bar{\gamma} = \eta \frac{\tau_{moy}}{G} = \eta \frac{T}{G\, F}$$

$$\eta = \frac{F}{I^2} \iint_F \frac{S'^2}{b^2} dF$$

- $U_T = \int_0^{\ell} \frac{\eta\, T^2}{2GF} dx$



Soit une poutre de longueur ℓ soumise à un cas de charge quelconque. Dans une section x, les efforts intérieurs sont l'effort normal $N(x)$, le moment de torsion $M_t(x)$, le moment de flexion $M_f(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$. La section de la poutre n'est pas nécessairement constante, mais peut varier modérément en fonction de x.



Application du théorème de Castigliano

L'énergie de déformation relative à chaque effort intérieur peut être calculée par intégration des relations différentielles établies dans les chapitres précédents.

Les formes intégrales des énergies élémentaires de déformation relatives à l'effort normal N, le moment de torsion M_t, le moment de flexion M_f et l'effort tranchant T ont pour expression

- $U_N = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EF} dx$
- $U_{M_t} = \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2GI_p} dx$
- $U_{M_f} = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx$
- $U_T = \int_0^{\ell} \frac{\eta\, T^2}{2GF} dx$

L'énergie de déformation totale dans la poutre est la somme des intégrales précédentes

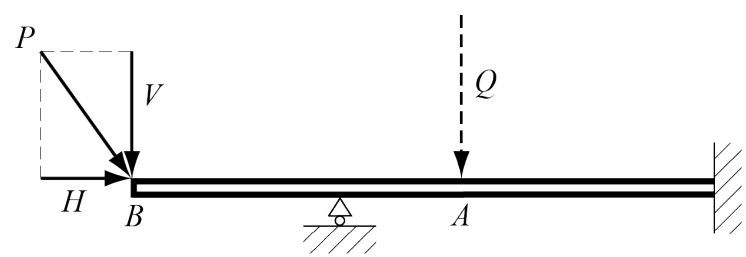
- $U = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EF} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2GI_p} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell} \frac{\eta\, T^2}{2GF} dx$

Pour obtenir le déplacement δ_k du point A_k où s'applique une force P_k, on peut, calculer la dérivée partielle de l'énergie de déformation U par rapport à cette force. Cependant, il est presque toujours préférable de permuter la dérivation et les intégrations, de sorte que le déplacement δ_k s'écrit

- $\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \int_0^\ell \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial P_k}dx + \int_0^\ell \frac{M_t}{GI_p}\frac{\partial M_t}{\partial P_k}dx + \int_0^\ell \frac{M_f}{EI}\frac{\partial M_f}{\partial P_k}dx + \int_0^\ell \frac{\eta\, T}{GF}\frac{\partial T}{\partial P_k}dx$

On applique au point dont on désire connaître le déplacement vertical δ_{AV} dans une direction donnée, une force Q arbitraire dans cette direction. Après avoir calculé les efforts intérieurs et les dérivées partielles, il suffit d'annuler la force fictive Q pour connaitre le déplacement en ce point.

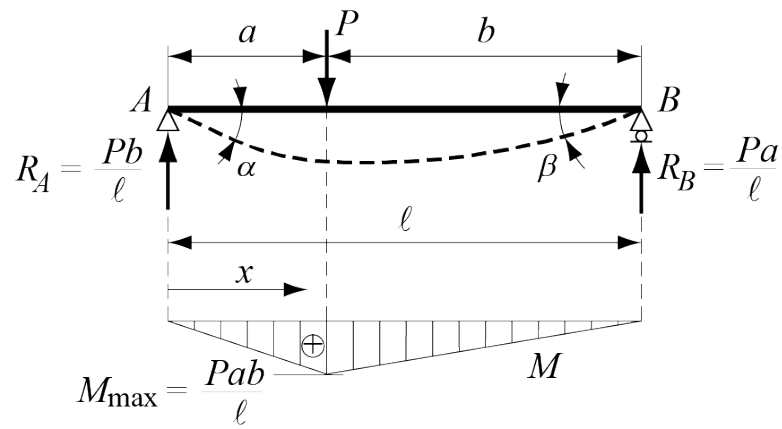
- $\delta_{AV} = \frac{\partial U}{\partial Q}$



Avec $Q = 0$

Problème 10.0

Déterminer la flèche maximale de la poutre en utilisant le théorème de Castigliano.



NOTE

Problème 10.0

Mécanique des structures

$$\boxed{\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}}$$

Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

Dr. Alain Prenleloup

SGM BA3 2024-2025

EPFL

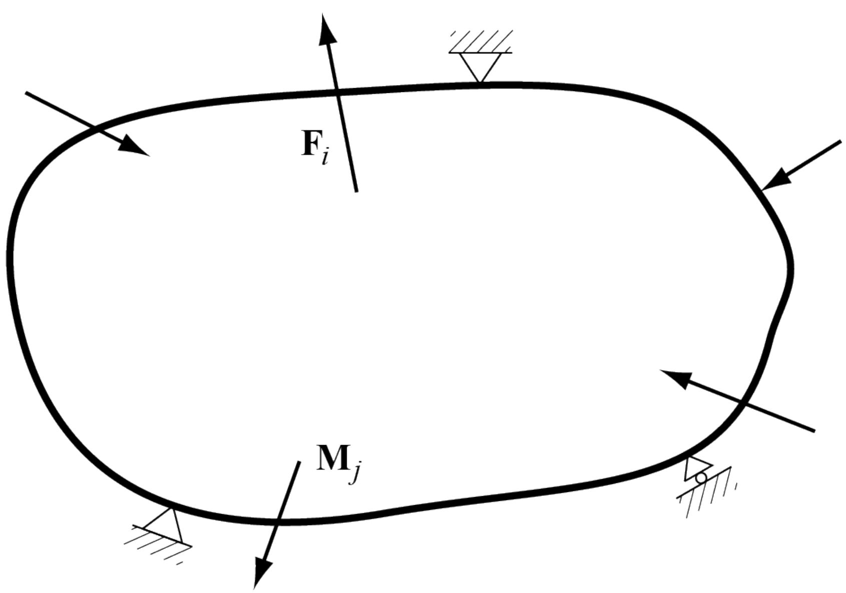
4 1
3 2

Forme quadratique de l'énergie de déformation

Comme dans tous les cas particuliers examinés jusqu'ici, nous supposerons que les déformations sont élastiques – donc réversibles – et proportionnelles aux forces ou aux moments qui les provoquent.

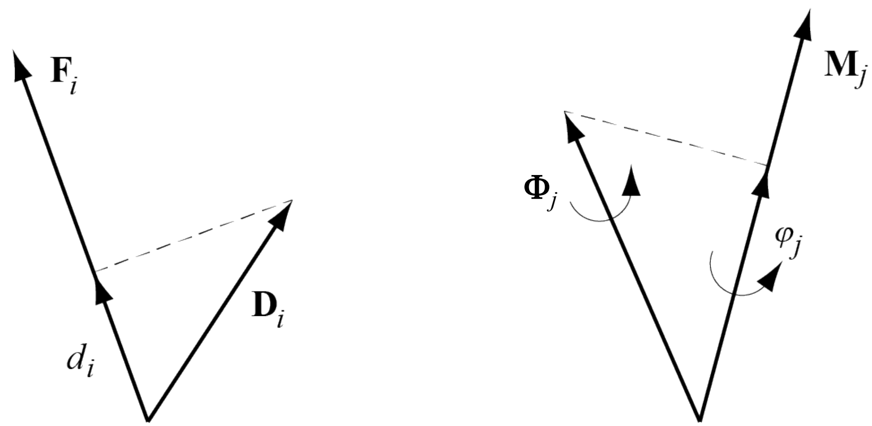
Considérons un système statique ou hyperstatique, astreint à un nombre quelconque de liaisons et soumis à n_1 forces $\mathbf{F}_i$ et n_2 moments $\mathbf{M}_j$, tous indépendants.

Quand toutes les forces et tous les moments sont nuls, on dit que le système se trouve dans son état initial ou naturel.



Forme quadratique de l'énergie de déformation

Soient $\mathbf{D}_i$ le déplacement de la force $\mathbf{F}_i$ et $\mathbf{\Phi}_j$ la rotation du moment $\mathbf{M}_j$ entre l'état initial du système et l'état final considéré. Désignons par d_i et φ_j leurs projections respectives sur les supports de $\mathbf{F}_i$ et $\mathbf{M}_j$



Afin de simplifier l'écriture et de travailler avec des grandeurs scalaires, nous adoptons pour la suite la convention suivante :

- P_i désigne une force généralisée, amplitude de la force $\mathbf{F}_i$ ou du moment $\mathbf{M}_i$
- δ_i dénote un déplacement généralisé (déplacement d_i ou rotation φ_i) dans la direction de P_i.

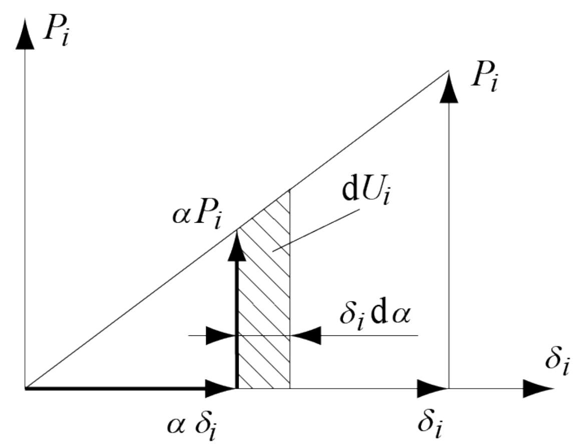
Forme quadratique de l'énergie de déformation

Introduisons le travail d'une force généralisée (= force ou moment) élastique.

Un état intermédiaire peut être défini en fonction d'un coefficient de proportionnalité α variant de 0 à 1 et qui détermine les forces αP_i et les déplacements $\alpha \delta_i$

Lors d'un accroissement $d\alpha$ du coefficient de proportionnalité, chaque force P_i fournit un travail élémentaire.

- $dU_i = \alpha P_i \cdot \delta_i d\alpha$



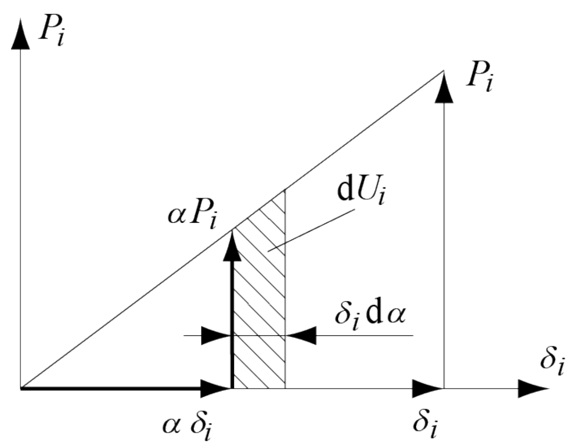
Forme quadratique de l'énergie de déformation

L'augmentation d'énergie élastique du système a pour valeur, avec $n = n_\mathrm{F} + n_\mathrm{M}$

- $dU = \sum_{i=1}^{n} dU_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i \cdot \alpha d\alpha$

Il suffit d'intégrer cette expression pour obtenir l'énergie accumulée par le système dans son état final (formule de Clapeyron):

- $U = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i$



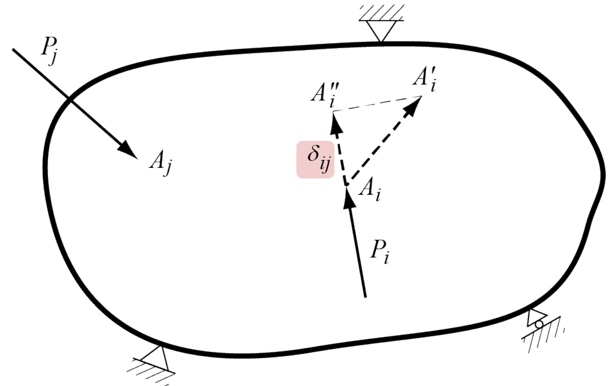
Forme quadratique de l'énergie de déformation

La *proportionnalité entre forces et déplacements* permet d'appliquer le principe de superposition au système. Les déplacements δ_i sont donc des fonctions linéaires des forces généralisées

- $\delta_i = a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{ii}\,P_i + \cdots + a_{ij}P_j + \cdots + a_{in}\,P_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_j$

$$= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \cdots + \delta_{ii} + \cdots + \delta_{ij} + \cdots + \delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$$

Le coefficient de proportionnalité a_{ij}, appelé coefficient d'influence, est égal à la projection, sur la force généralisée P_i agissant au point A_i, du déplacement provoqué en ce point par une force unité appliquée au point A_j dans la direction de P_j

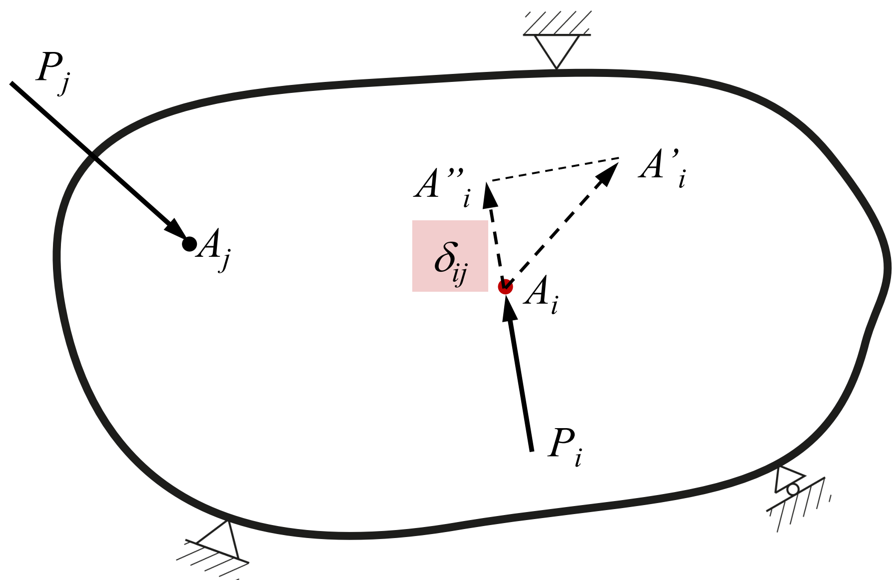


Le scalaire $\delta_{ij} = a_{ij}\,P_j$ est la contribution de la force P_j au déplacement du point d'application de la force P_i dans la direction de cette dernière

Forme quadratique de l'énergie de déformation

Interprétation du coefficient d'influence a_{ij}

- $A_iA'_i$ = déplacement de P_i dû à P_j
- $A_iA''_i = \delta_{ij}$

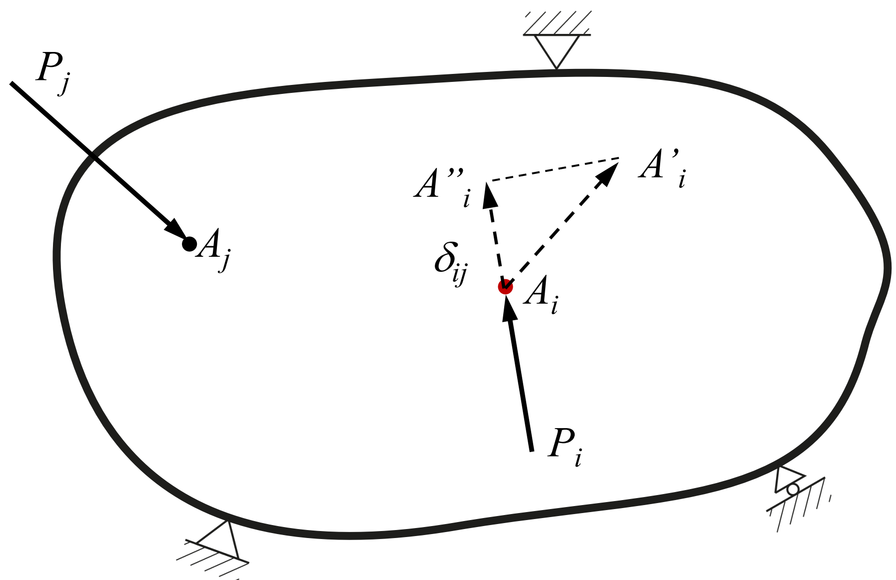


Forme quadratique de l'énergie de déformation

L'expression peut ensuite être portée dans la formule de Clapeyron pour aboutir à la forme finale de la seconde *formule de Clapeyron*

- $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i\delta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_iP_j$

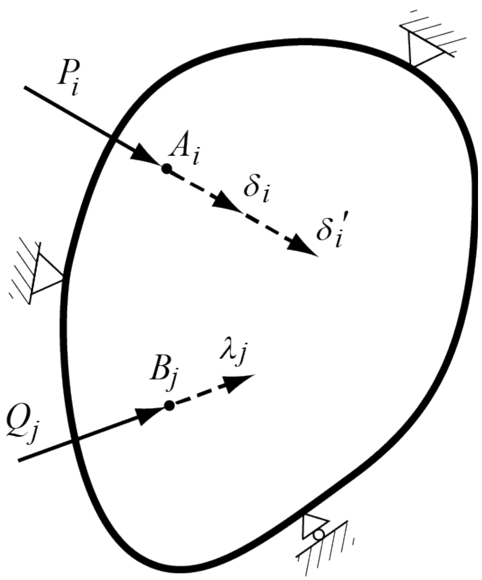
On voit que l'énergie de déformation élastique est une fonction quadratique des forces et moments agissant sur le système



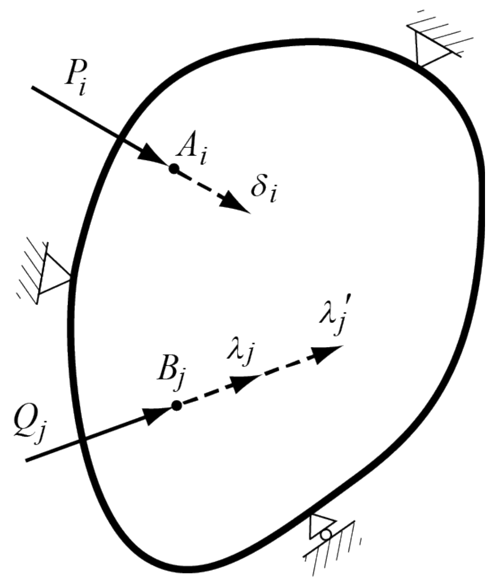
Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Dans un système élastique et proportionnel, le travail d'un système de forces P_i, lors de la déformation imposée par un second système de forces Q_j, est égal au travail du système de forces Q_j lors de la déformation imposée par le premier système de forces P_i.

- $\sum_{i=1}^{n} \delta_i' P_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' Q_j$



Système soumis successivement à une force P_i puis P_j



Système soumis successivement à une force P_j puis P_i

Démonstration : Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Considérons un corps élastique soumis à deux systèmes de forces généralisées P_i et Q_j , agissant respectivement aux points A_i et B_j

Énergie de déformation (Clapeyron) induite par l'application de la force P_i au point A_i

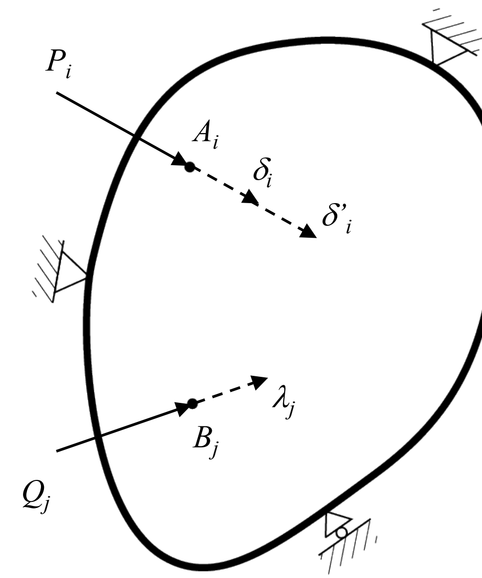
- $U(P_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \delta_i \ P_i$

Énergie de déformation induite par l'application de la force Q_j au point B_j

- $U(Q_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j \ Q_j$

Énergie de déformation induite par l'application de la force Q_j au point A_i

- $U'(P_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \delta_i' P_i$



Démonstration : Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Procédons maintenant de manière inverse, en appliquant d'abord les forces Q_j seules

Énergie de déformation (Clapeyron) induite par l'application de la force Q_j au point B_j

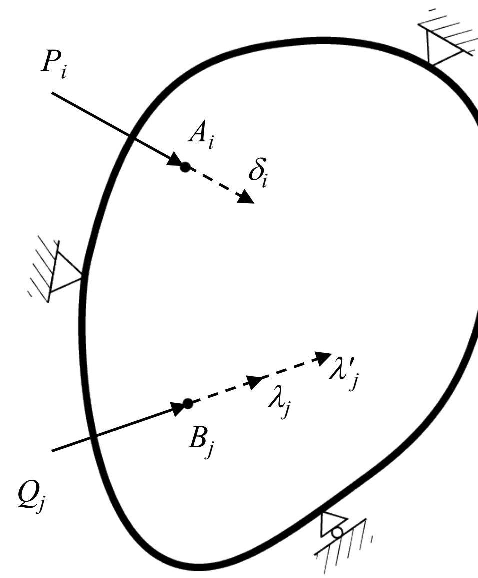
- $U(Q_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j \; Q_j$

Énergie de déformation induite par l'application de la force P_i au point A_i

- $U(P_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \delta_i \; P_i$

Énergie de déformation induite par l'application de la force Q_j au point A_i

- $U'(Q_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \lambda'_j Q_j$



Démonstration : Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Dans l'état d'équilibre final, l'énergie de déformation totale est donnée par la somme des égalités.

- $U(P_i, Q_j) = U(P_i) + U(Q_j) + U'(P_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \delta_i \; P_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j \; Q_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j' Q_j$
- $U(Q_j, P_i) = U(Q_j) + U(P_i) + U'(Q_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j \; Q_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \delta_i \; P_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \delta_i' P_i$

Les énergie déformation exprimées sont forcément égale puisqu'elles ne dépendent que de l'état final du système. D'où finalement, on retrouve l'expression exprimée du théorème de réciprocité énoncé précédemment

- $\sum_{i=1}^{n} \delta_i' P_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' Q_j$

Égalité des coefficients d'influence réciproques

Le théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh exprime l'égalité de deux énergies et peut s'énoncer sous la forme plus restreinte de l'égalité des coefficients d'influence

- $a_{ij} = a_{ji}$

Théorème de l'égalité des coefficients d'influence réciproques : *Dans un système élastique et proportionnel, les coefficients d'influence réciproques* a_{ij} *et* a_{ji} *relatifs aux déplacements des points d'application de deux forces extérieures* P_i *et* P_j *sont égaux*

Pour démontrer cette égalité, considérons un système déformé possédant une énergie de déformation U_0. Une nouvelle force P_i appliquée au point A_i provoque selon sa direction un déplacement δ_{ii} de ce point et fournit l'énergie de déformation U_{ii} au système

- $\delta_{ii} = a_{ii} P_i$
- $U_{ii} = \frac{1}{2} \delta_{ii} P_i = \frac{1}{2} a_{ii} P_i^2$

Démonstration : Égalité des coefficients d'influence réciproques

A partir de ce nouvel état du système, appliquons au point A_j une force P_j qui entraîne un déplacement δ_{jj} de ce point et un travail U_{jj}

- $\delta_{jj} = a_{jj}P_j$
- $U_{jj} = \frac{1}{2}\delta_{jj}P_j = \frac{1}{2}a_{jj}P_j^2$

Cette force provoque en outre un nouveau déplacement δ_{ij} au point A_i

- $\delta_{ij} = a_{ij}P_j$
- $U_{ij} = \delta_{ij}P_j = a_{ij}P_jP_i$

L'énergie du système s'exprime (ΔU le travail des autres forces $n \neq i, j$)

- $U = U_0 + \Delta U + \frac{1}{2}a_{ii}P_i^2 + \frac{1}{2}a_{jj}P_j^2 + a_{ij}P_jP_i$

Démonstration : Égalité des coefficients d'influence réciproques

Si l'on refait le même développement en appliquant P_j puis P_i, on trouve :

- $U = U_0 + \Delta U + \frac{1}{2} a_{jj} P_j^2 + \frac{1}{2} a_{ii} P_i^2 + a_{ji} P_i P_j$

ΔU ayant la même signification et la même valeur que précédemment, on a

- $a_{ij} P_j P_i = a_{ji} P_i P_j$

Et donc, on trouve l'expression du théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh introduit au début de ce chapitre

- $a_{ij} = a_{ji}$

Mécanique des structures

$$\boxed{\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}}$$

Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

Dr. Alain Prenleloup

SGM BA3 2024-2025

EPFL

4 1
3 2

Enoncé : Le déplacement δ_k d'une force généralisée P_k, agissant sur un système élastique et proportionnel, est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation du système par rapport à cette force

- $\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$

Le déplacement généralisé δ_k est la composante dans la direction de la force généralisée P_k (force ou moment) du déplacement ou de la rotation provoqué par l'ensemble des forces généralisées appliquées au système.

L'énergie de déformation s'exprime (par la seconde formule de Clapeyron) :

- $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}P_iP_j$

Démonstration : Théorème de Castigliano

Isolons dans cette double somme les 2n–1 termes dépendant de la force P_k

- $$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_{ik} P_i P_k + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_{kj} P_k P_j + \frac{1}{2}\alpha_{kk} P_k^2 + U'$$

U' dénote la part de l'énergie de déformation qui est indépendante de P_k. En dérivant cette expression par rapport à la force généralisée P_k

- $$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_{ik} P_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_{kj} P_j + \alpha_{kk} P_k$$

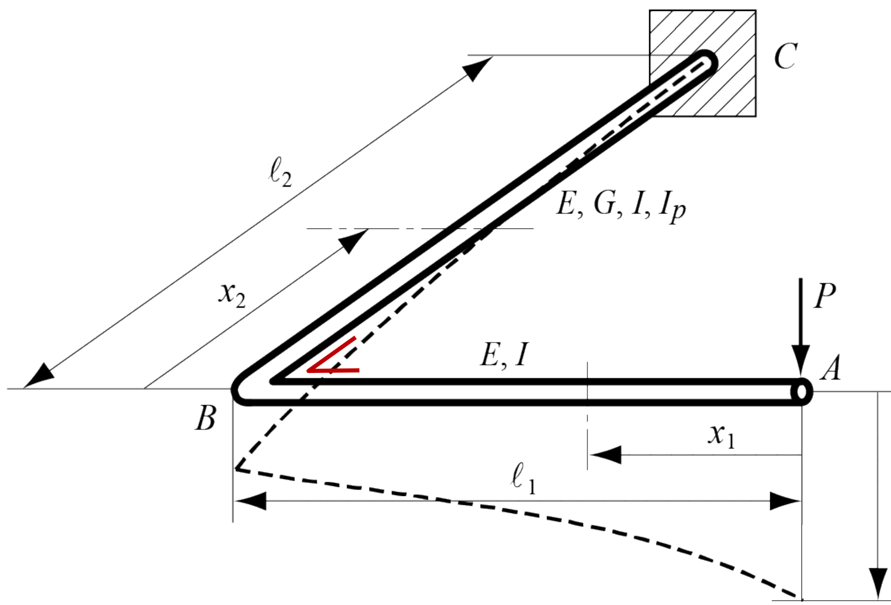
En réintégrant le troisième terme du membre droit de cette égalité dans les deux sommes, on peut écrire, grâce à l'égalité des coefficients d'influence réciproques ($a_{ij} = a_{ji}$) et le lien entre le déplacement et les forces généralisées

- $$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} P_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} P_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} P_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} P_j = \frac{1}{2}\delta_k + \frac{1}{2}\delta_k = \delta_k$$

$a_{ij} = a_j$

Problème 10.1

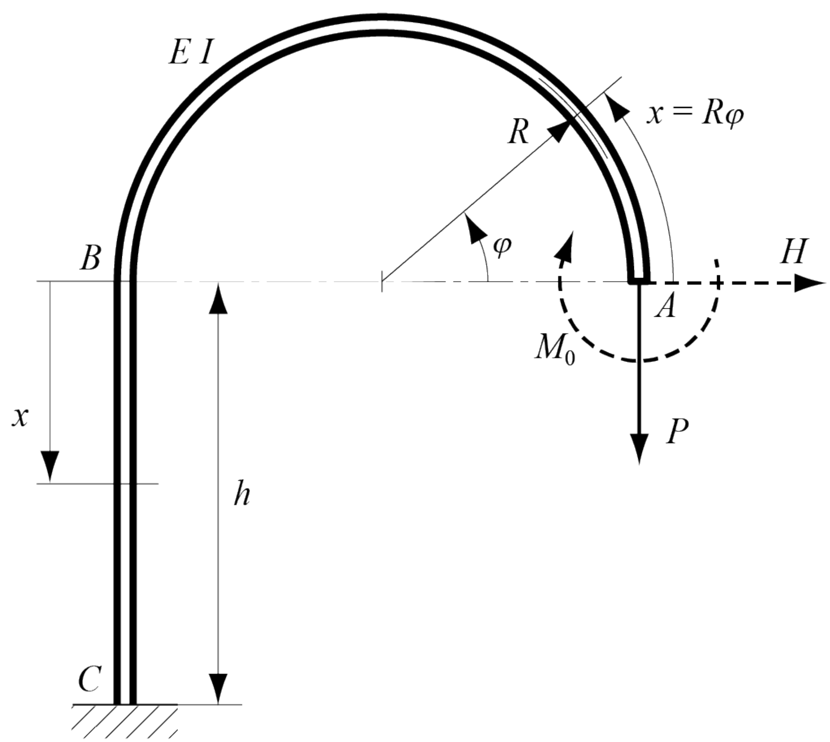
En négligeant l'influence de l'effort tranchant, déterminer par le théorème de Castigliano le déplacement vertical δ du point A d'une poutre encastrée (3d, coude perpendiculaire) en forme de L de section circulaire, soumise à une force P en son extrémité libre



NOTE

Problème 10.2

En ne tenant compte que de la flexion et en recourant au théorème de Castigliano, calculer pour la poutre encastrée représentée le déplacement vertical δ_V, le déplacement horizontal δ_H ainsi que la rotation α au point A où s'applique une force verticale P



Mécanique des structures

$$\boxed{\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}}$$

Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

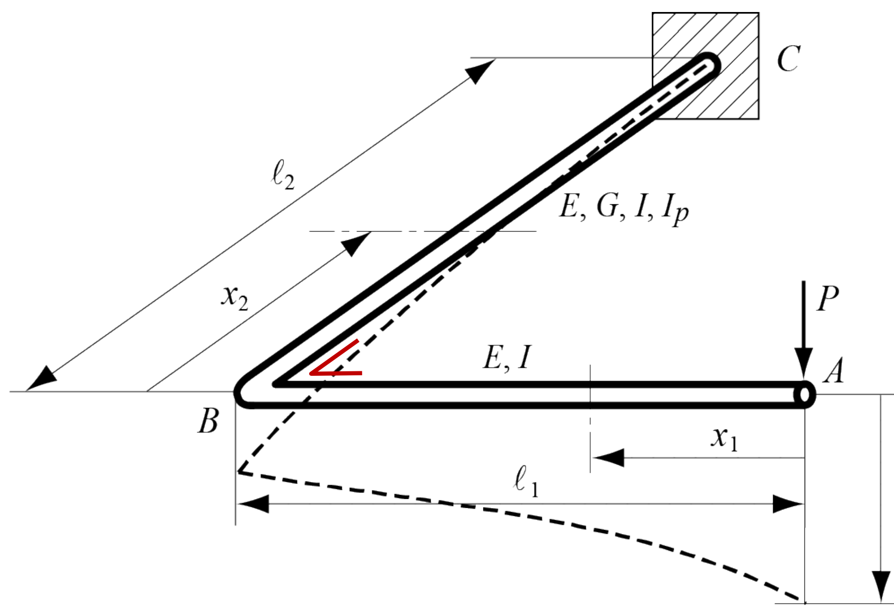
Dr. Alain Prenleloup

SGM BA3 2024-2025

EPFL

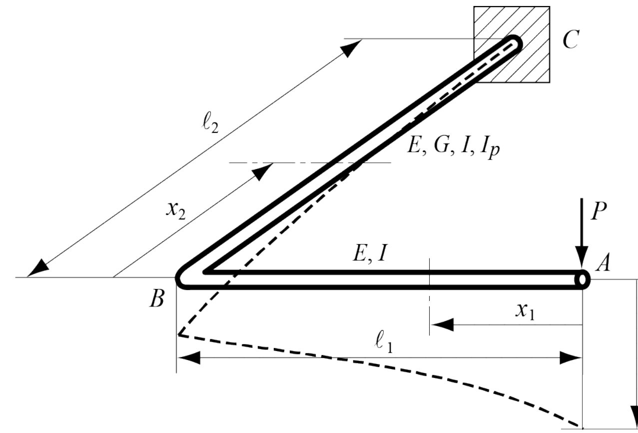
Problème 10.1

En négligeant l'influence de l'effort tranchant, déterminer par le théorème de Castigliano le déplacement vertical δ du point A d'une poutre encastrée (3d, coude perpendiculaire) en forme de L de section circulaire, soumise à une force P en son extrémité libre

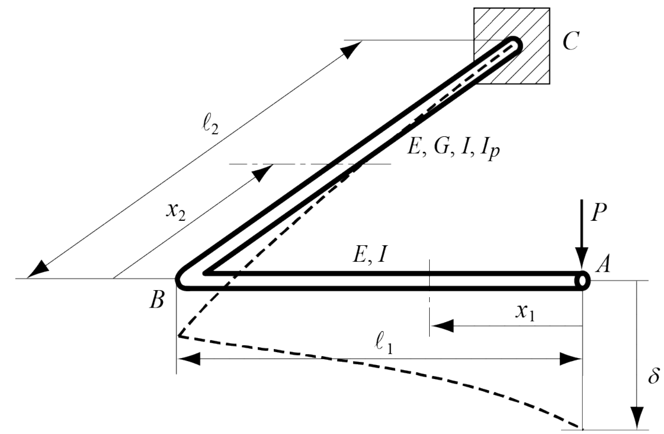


NOTE

Problème 10.1

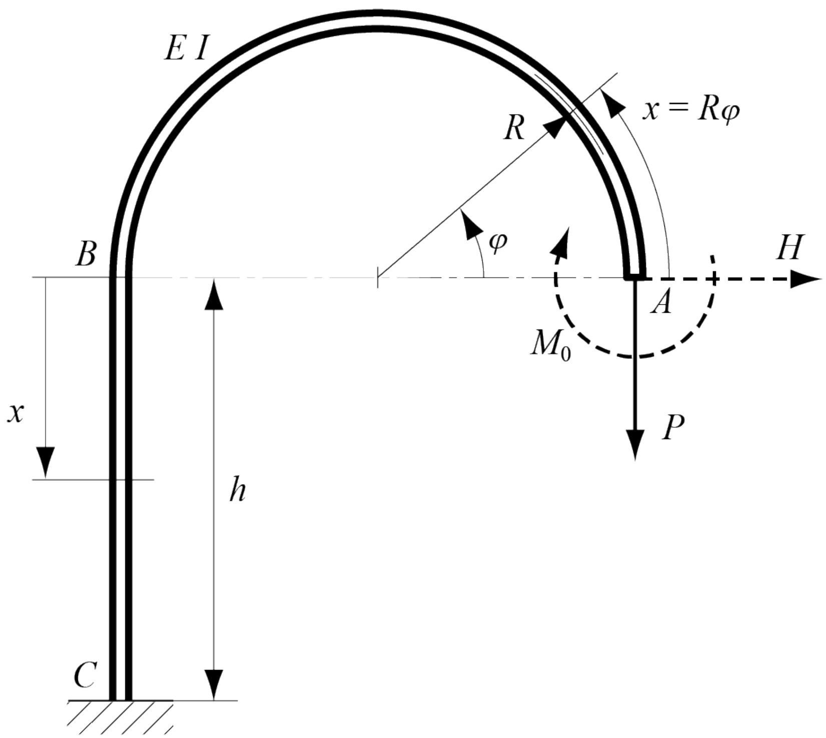


Problème 10.1

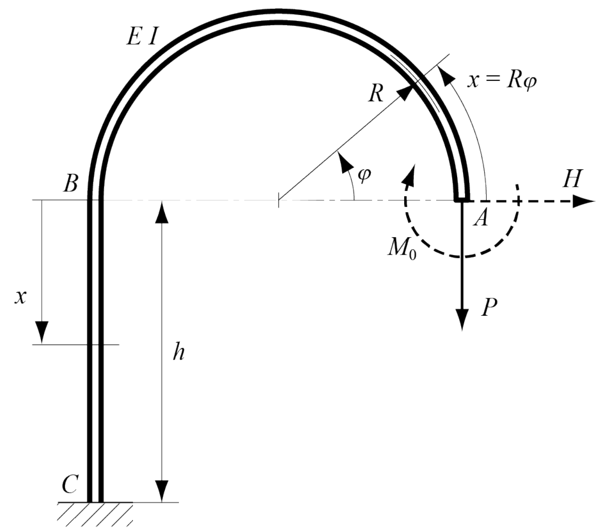


Problème 10.2

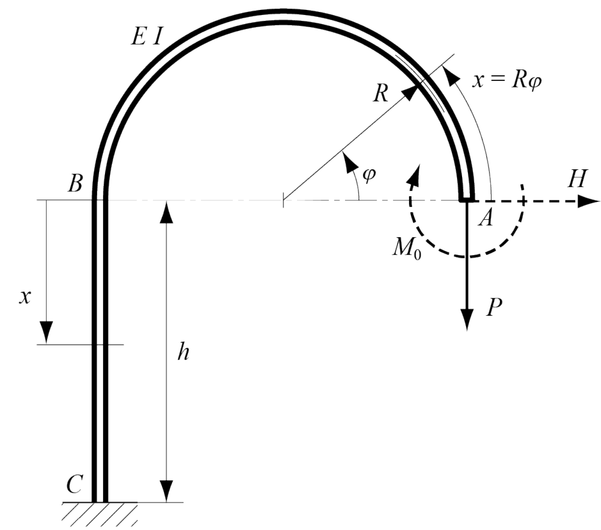
En ne tenant compte que de la flexion et en recourant au théorème de Castigliano, calculer pour la poutre encastrée représentée le déplacement vertical δ_V, le déplacement horizontal δ_H ainsi que la rotation α au point A où s'applique une force verticale P



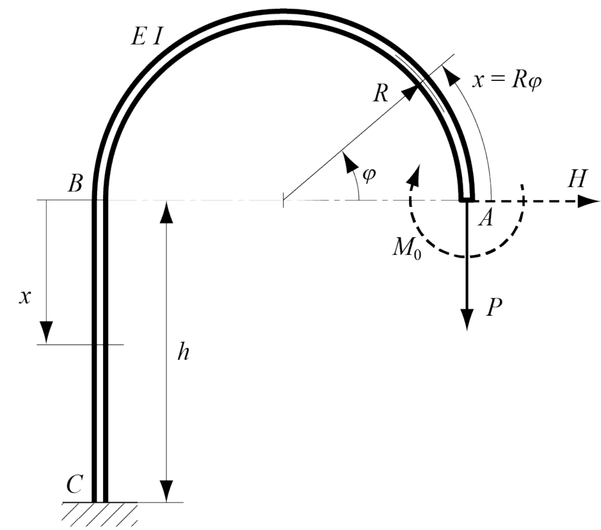
Problème 10.2



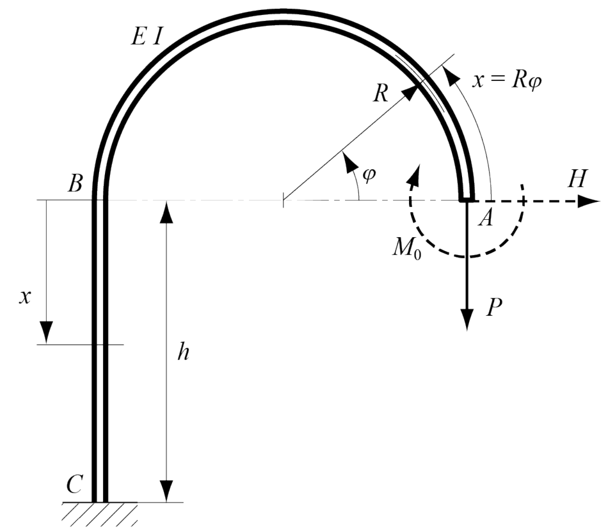
Problème 10.2



Problème 10.2

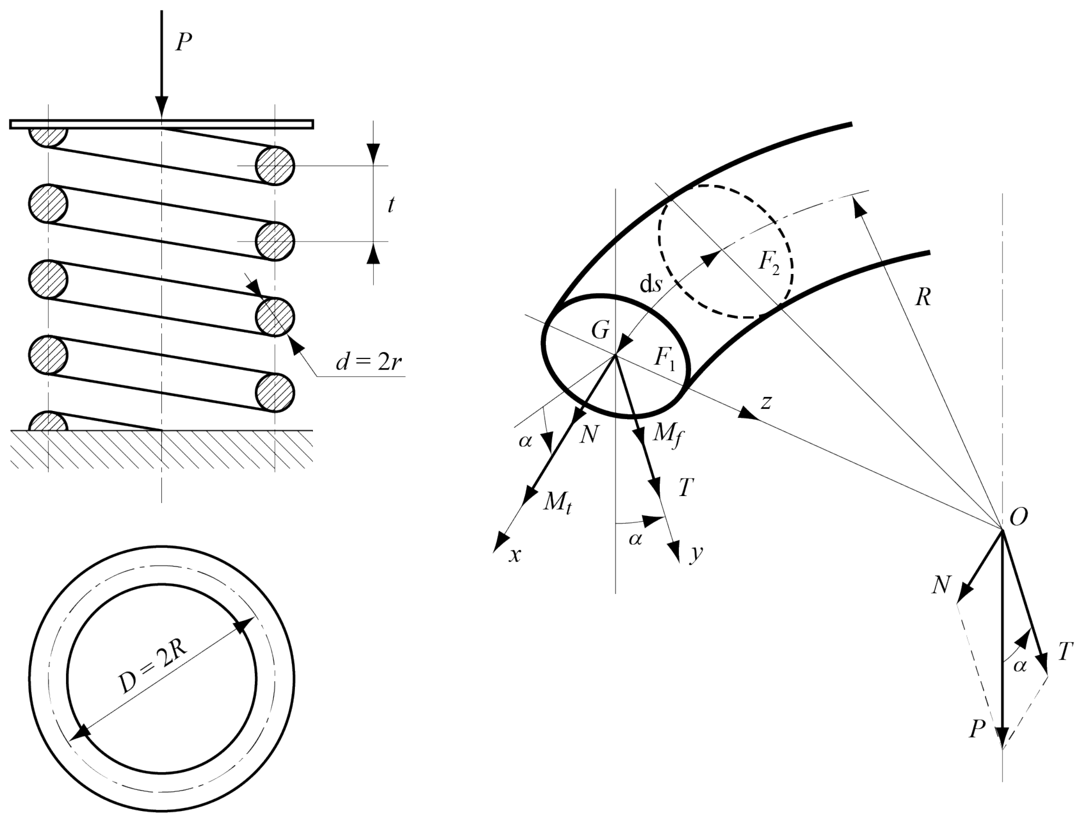


Problème 10.2



Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre D, formé de n spires de diamètre d et soumis à une charge de compression P. Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.



NOTE

Problème 5.2

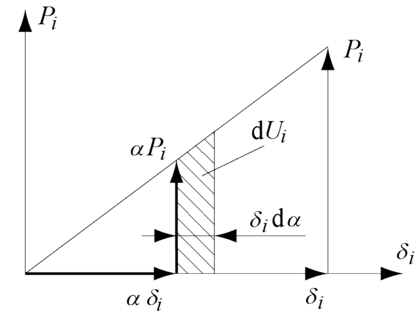
Problème 5.2

Démonstration : Théorème de Castigliano

Étapes justificatives

Première formule de Clapeyron

- $U = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i$

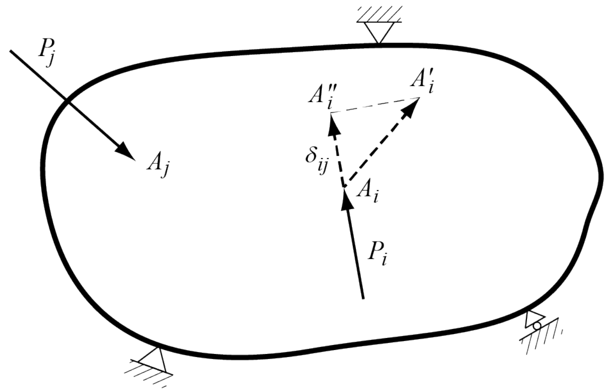


Le déplacement généralisé

- $\delta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$

Seconde formule de Clapeyron

- $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_i P_j$

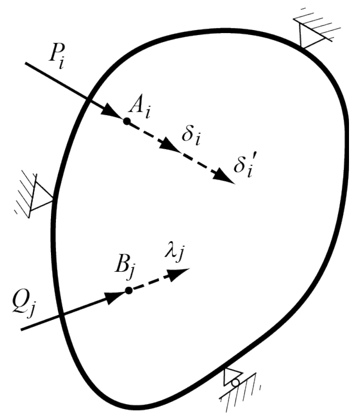


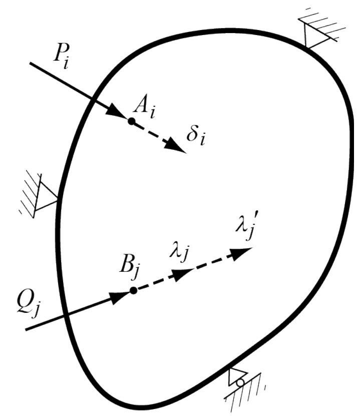
Démonstration : Théorème de Castigliano

Étapes justificatives

Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

- $\sum_{i=1}^{n} \delta_i' P_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' Q_j$





Le théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh exprime l'égalité de deux énergies et peut s'énoncer sous la forme plus restreinte de l'égalité des coefficients d'influence

- $a_{ij} = a_{ji}$

Démonstration : Théorème de Castigliano

Étapes justificatives

Théorème de Castigliano

- $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}P_iP_j$

- $U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\alpha_{ik}P_iP_k + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\alpha_{kj}P_kP_j + \frac{1}{2}\alpha_{kk}P_k^2 + U'$

- $\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\alpha_{ik}P_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\alpha_{kj}P_j + \alpha_{kk}P_k$

- $\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}P_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}P_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}P_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}P_j = \frac{1}{2}\delta_k + \frac{1}{2}\delta_k = \delta_k$

Ainsi on peut écrire → $\boxed{\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}}$